

广义系统的圆度和圆度的计算公式

The Roundness and the Formula to Calculate the Roundness for Generalized Systems

冯向军

Xiangjun Feng

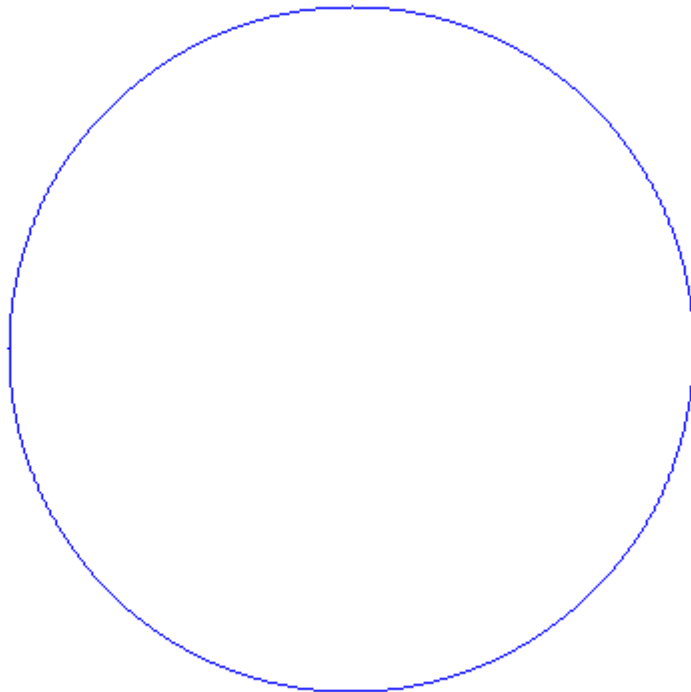
2008 年6月9日初稿

2008 年 8 月 17 日修订

[摘要]：本文给出了广义系统圆度的一般表达式并对推导过程作了详细解说。

1 平等遍历性的图形表达、圆度和分布函数的极坐标表示法

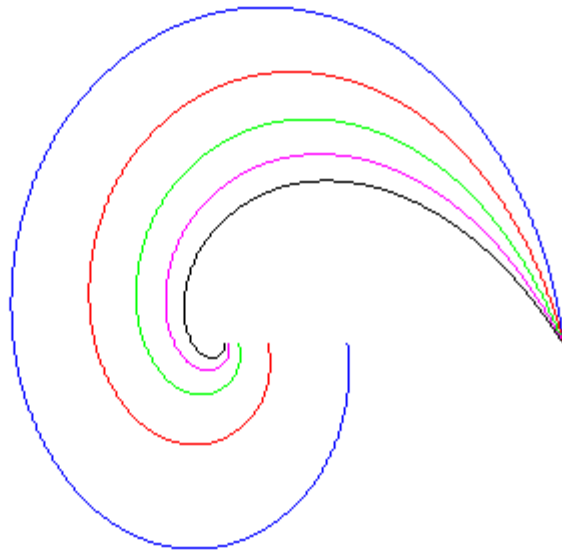
一般而言，所谓平等遍历性就是在各广义方向上保持某种不变性的性质。圆就具备平等遍历性。在极坐标系下圆在任意极角方向上都保持极径不变。所以我们把平等遍历性又称为圆性，而把刻画圆性的圆满程度的参数称为圆度。假如我们用极角 θ 表示广义方向或广义集合的标志值，而用极径表示规格化的概率分布或权重分布，那么我们就得到了分布函数的极坐标表示法。显然具有平等遍历性的广义集合其分布在极坐标下就表现为一个圆。本节要展示多种分布函数的极坐标表示法(如下面的图形所示)。



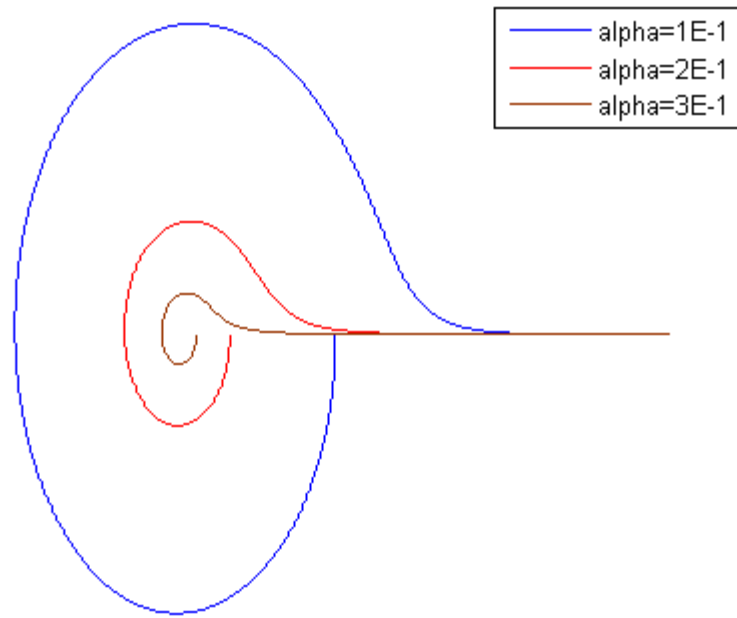
图一、具有平等遍历性的广义集合其分布在极坐标下的图形表达。



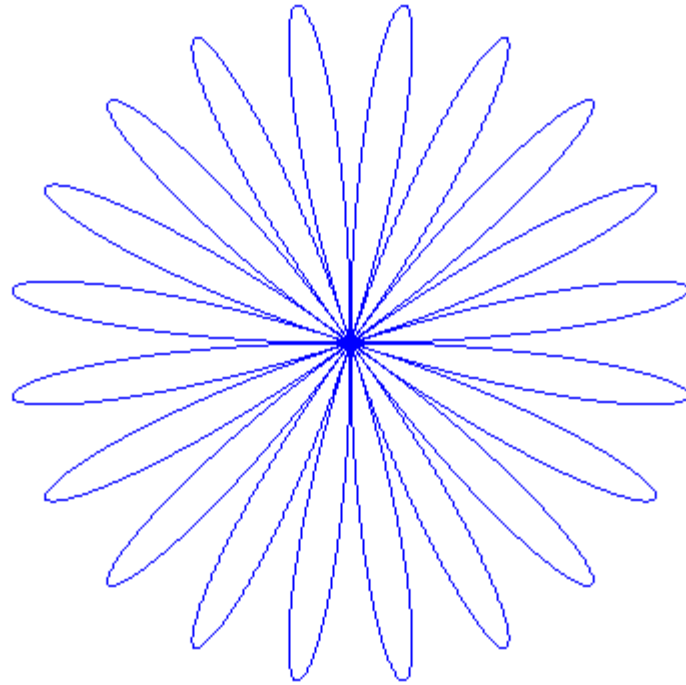
$r = \exp(-\text{beta} * \text{theta})$



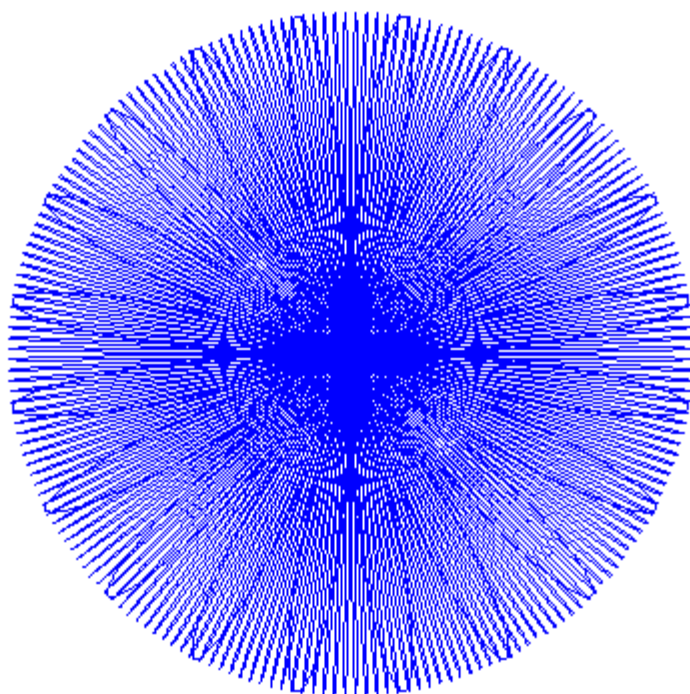
图二、用极坐标下表达指数分布 $r = \exp(-\text{beta} * \text{theta})$ 。



图三、用极坐标下表达幂分布 $r = \theta^{-\alpha}$ 。



图四、用极坐标下表达正弦分布 $r=|\sin(2\pi f\theta)|$, $f=1E-4$ 。



图五、用极坐标下表达正弦分布 $r=|\sin(2\pi f \cdot \theta)|$, $f=1E-3$ 。

2 广义系统圆度的一般表达式

$$\text{广义系统的圆度} = n^{(q-1)} \frac{1}{(q-1)} (1 - p_1^q - p_2^q - \dots - p_n^q) = n^{(q-1)} \text{Tsallis 广义熵} \quad (1)$$

这其中 n 为广义集合标志值的种类数, q 为不等于 1 的实数, p_i 为广义集合第 i 个标志值的概率或权重, $i = 1, 2, \dots, n$, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ 。

当 $q = 2$ 时,

$$\text{广义系统的圆度} = (n-1) \cdot \text{广义集合各标志值概率的两两平方距离的和} \quad (2)$$

当 $q \rightarrow 1$ 时,

$$\text{广义系统的圆度} = \text{香依信息熵} = -p_1 \log(p_1) - p_2 \log(p_2) - \dots - p_n \log(p_n) \quad (3)$$

3 关于圆度新公式推导过程的一种较为清晰的解释

3.1

在《组成论随想录》中 [1], 我引入了平均概率 P_{avg} 的概念, 所谓平均概率就是指概率自身的统计平均值。

$$P_{avg} = p_1 p_1 + p_2 p_2 + \dots + p_n p_n \quad (4)$$

我发现平均概率 P_{avg} 是个反映广义集合聚集度、不平等度、不圆度的物理量。当广义集合某一标志值的概率为 1 而其余为 0 时，平均概率 P_{avg} 达最大值 1，这时广义集合聚集度、不平等度、不圆度都是最大的。

因此我自然联想到

$$C(1 - p_1 p_1 - p_2 p_2 - \dots - p_n p_n)$$

是个能反映广义集合分散度、平等度和圆度的物理量，这其中 C 是待定常量。

3.2

在探索中我发现当 $C = n$ 时， $n(1 - p_1 p_1 - p_2 p_2 - \dots - p_n p_n)$ 具有十分明确的物理意义，它在数学上等于 $(n-1)$ - 广义集合各标志值概率的两两平方距离的和(我曾把后者定义为广义系统的圆度。[2])。

也就是说我们证明了

$$n(1 - p_1 p_1 - p_2 p_2 - \dots - p_n p_n) = (n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (p_i - p_j)^2 \quad (5)$$

3.3

考虑到著名的 Tsallis 广义熵 = $\frac{1}{q-1}(1 - p_1^q - p_2^q - \dots - p_n^q)$ [3], 我惊奇地发现 [4]

广义系统的圆度 = $n(\text{Tsallis 广义熵})|_{(q=2)}$

3.4

现在将平均概率推广为概率的 $(q-1)$ 阶矩 P_m ,

$$P_m = (p_1 p_1^{(q-1)} + p_2 p_2^{(q-1)} + \dots + p_n p_n^{(q-1)})$$

不难发现 P_m 也是个描述广义集合聚集度、不平等度、不圆度的物理量。

当广义集合某一标志值的概率为 1 而其余为 0 时， P_m 达最大值 1，这时广义集合聚集度、不平等度、不圆度都是最大的。

因此我又自然联想到

$$C_1(1 - P_m) = C_1(1 - p_1^q - p_2^q - \dots - p_n^q)$$

也是一个能反映广义集合分散度、平等度和圆度的物理量，这其中 C_1 是待定常量。

3.5

考虑到当广义系统圆度最大时

$$C_1(1 - P_m) = C_1(1 - n^{-(q-1)}) = C_1 n^{-(q-1)} (n^{(q-1)} - 1)$$

因此我选择 $C_1 = n^{(q-1)}$ 而使得括号外的项归一。就有

$$C_1(1 - P_m) = n^{(q-1)} (1 - p_1^q - p_2^q - \dots - p_n^q)$$

再考虑到当 $q \rightarrow 1$ 时

$$\frac{1}{q-1} (1 - p_1^q - p_2^q - \dots - p_n^q) = -p_1 \log(p_1) - p_2 \log(p_2) - \dots - p_n \log(p_n) = \text{香侖信息熵}$$

而我巴不得圆度公式能包含香侖信息熵，所以就定义广义系统圆度的一般表达式为

广义系统的圆度(Roundness) = $\frac{C_1(1-P_m)}{(q-1)} = n^{(q-1)}$ (Tsallis 广义熵)。

4 关于一个重要陈述的数学证明

重要陈述:

当 $q = 2$ 时,

广义系统的圆度 = $(n-1)$ - 广义集合各标志值概率的两两平方距离的和。

证明:

$(n-1)$ - 广义集合各标志值概率的两两平方距离的和

$$\begin{aligned} &= (n-1) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (p_i - p_j)^2 \\ &= (n-1) - (n-1) \sum_{i=1}^n p_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n p_i p_j \\ &= (n-1) - (n-1) \left(1 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i=i+1}^n p_i p_j\right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i=i+1}^n p_i p_j \\ &= n \left(2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n p_i p_j\right) \\ &= n(1 - p_1^2 - p_2^2 - \dots - p_n^2) \\ &= \text{当 } q = 2 \text{ 时的广义系统的圆度。} \end{aligned}$$

证毕

5 关于广义系统圆度的最大值

广义系统圆度的最大值 = $\frac{(n^{(q-1)} - 1)}{q-1}$

当 $q \rightarrow 1$ 时

广义系统圆度的最大值 = $\log(n)$ 。

6 结语

本文从概率本身的各阶矩是广义系统不圆度的量度这一思想出发推导出广义系统圆度的一般表达式, 并对广义系统圆度这个概念和一般表达式的建立过程作了详细解说。

参考文献

- [1] 冯向军, 张学文, 鲁晨光, 组成论随想录, 世界华人一般性科学论坛第 1 卷第 6 期, ISSN:1936-7260, 2005 年 12 月. <http://www.aideas.com/CTT.doc>
- [2] Xiangjun. Feng, "A Theory on the determination of the roundness for generalized systems," WCFSGS, Vol. 3, No.2, ISSN:1936-7260, Feb. 2007 (in Chinese)
- [3] Xiangjun, Feng, arXiv:cond-mat.stat-mech/0705.1332 v4. May, 2007.
- [4] C. Tsallis, J. Stat. Phys. 52, (1988) 479.